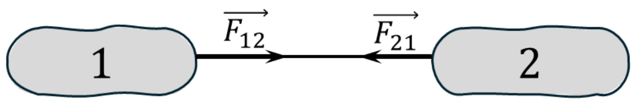
Динамика

***Df*:** *Раздел механики, изучающий механическое движение на основе силовых представлений*

***Df*:** *Сила — векторная физическая величина, характеризующая направление и интенсивность взаимодействия между телами*

Размерность силы $[\vec{F}] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}$

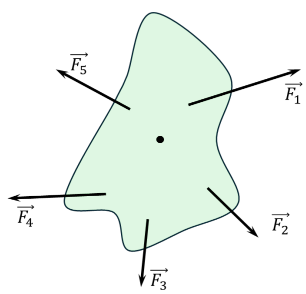


Законы Ньютона

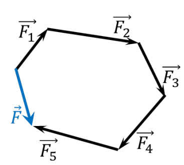
***Lw 1*:** *Существуют такие системы отсчёта, относительно которых МТ движется <u>равномерно</u> и <u>прямолинейно</u>, если на неё <u>не</u> действуют другие тела или их воздействия скомпенсированы*

***Lw 2*:** *Ускорение МТ (центра масс абсолютно твёрдого тела) прямопропорционально равнодействующей всех сил и обратнопропорционально её массе.*

Равнодействующая сила:



$$\boxed{\vec{F} = \vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_5 = \sum_{i=1}^{5} \vec{F}_i} \quad (1)$$



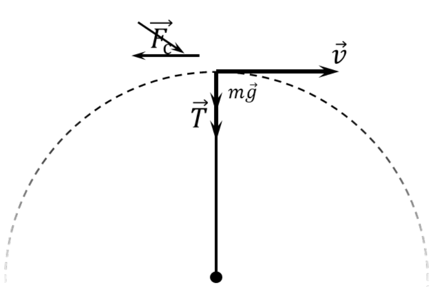
$$|\vec{a}| = |\vec{F}|$$

$$a \sim \frac{1}{m}$$

$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{F}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}{m} \Leftrightarrow \boxed{m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i} \quad (2)$$

***Ex*:**



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$$

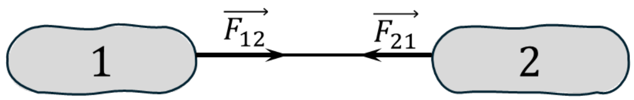
$$T = m(a_n - g) = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right)$$

$$\frac{v^2}{l} = g$$

$$\boxed{v_{\min} = \sqrt{gl}} \quad (3)$$

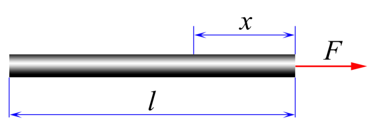
Lw 3*: *Тела(материальные точки) действуют друг на друга, равными по модулю и противоположными по направлению.

- F_{12} и F_{21} возникают и исчезают одновременно
- F_{12} и F_{21} имеют одинаковую природу
- Складывать силы нельзя, т.к. они приложены к разным телам



$$\boxed{\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21}} \quad (4)$$

Ex*: *2.1.5. *Какая сила действует в поперечном сечении однородного стержня длины l на расстоянии x от того конца, к которому вдоль стержня приложена сила F?*



К задаче 2.1.5

Решение. Если рассматривать стержень массой m как единое целое, то он будет двигаться с ускорением

$$a = \frac{F}{m}$$

Т.к. стержень нерасстяжим, то ускорение всех его частей одинаково и равно a

Рассмотрим малый участок стержня длины Δx и массы Δm. Т.к. стержень однородный

$$\Delta m = m\frac{\Delta x}{l}$$

Запишем второй закон ньютона для этого участка.

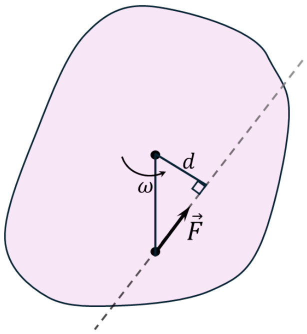
$$a\,\Delta m = F(x + \Delta x) - F(x) \ (1)$$

Где $F(x + \Delta x)$ и $F(x)$ сила взаимодействия вместе с соседями Просуммируем выражение (1) по горизонтальной координате от x до l:

$$\sum am\frac{\Delta x}{l} = \sum \Delta F$$

$$F(x) = ma\frac{l - x}{l} \Leftrightarrow \boxed{F(x) = F\left(1 - \frac{x}{l}\right)} \quad (5)$$

Динамика вращательного движения



$\vec{F}$ — сила
d — плечо силы

$$M \pm F \cdot d = \pm F \cdot r \cdot \sin\alpha$$

Размерность момента силы $[M] = \text{Н} \cdot \text{м} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = -\vec{F} \times \vec{r}} \quad (1)$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

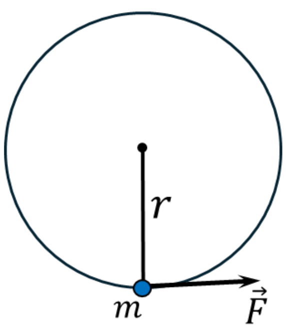
***Df*:** *<u>Момент инерции</u> (J) — скалярная физическая величина, характеризующая инертные свойства тела при вращательном движении*

Размерность момента инерции $[J] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$

***Lw*:** *Произведение <u>момента инерции</u> на <u>угловое ускорение</u> тела равно <u>сумме моментов сил</u>, действующих на тело*

$$\boxed{J\beta = \sum_{i=1}^{k} \pm M_i} \quad (2)$$

***Ex*:** *Материальная точка*



Второй закон Ньютона

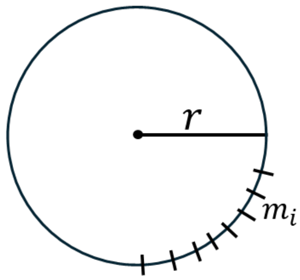
$$ma = F$$

$$mar = F \cdot r$$

$$a = \beta \cdot r$$

$$(mr^2)\beta = M \Rightarrow \boxed{J = mr^2} \quad (3)$$

***Ex*:** *Кольцо*



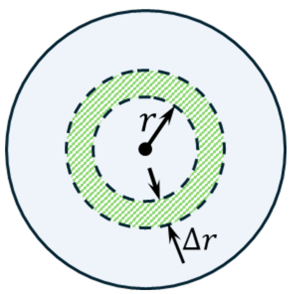
***NO*:** *Момент инерции аддитивен*

$$\boxed{J = J_1 + J_2 + \cdots + J_n} \quad (4)$$

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} J_i$$

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} m_i r^2 = r^2 \sum_{i=1}^{\infty} m_i = mr^2$$

***Ex*:** *Однородный диск*



Поверхностная плотность диска

$$\sigma = \frac{\Delta m}{\Delta S} = \frac{dm}{dS} = \text{const}$$

$$J_i = m_i r_i^2$$

$$\Delta S_i = 2\pi r_i \Delta r_i$$

$$m_i = \sigma \Delta S_i = \sigma 2\pi r_i \Delta r_i$$

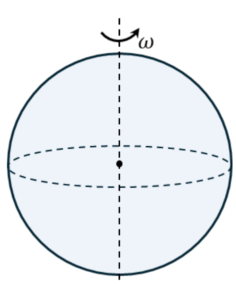
$$J_i = m_i r^2 = 2\pi\sigma r_i^3 \Delta r_i$$

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} m_i r^2 = \sum_{i=1}^{\infty} 2\pi\sigma r_i^3 \Delta r_i$$

$$J = 2\pi\sigma \sum_{i=1}^{\infty} r_i^3 \Delta r_i = 2\pi\sigma \frac{r^4}{4} = \frac{\sigma\pi r^4}{2} \Rightarrow \boxed{J = \frac{mR^2}{2}} \quad (5)$$

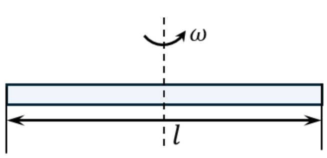
Другие примеры:

***Ex*:** *Шар*



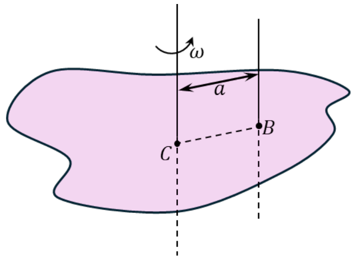
$$\boxed{J = \frac{2mR^2}{5}} \quad (6)$$

***Ex*:** *Однородный стержень*



$$\boxed{J = \frac{ml^2}{12}} \quad (7)$$

Th*: *Теорема Штейнера

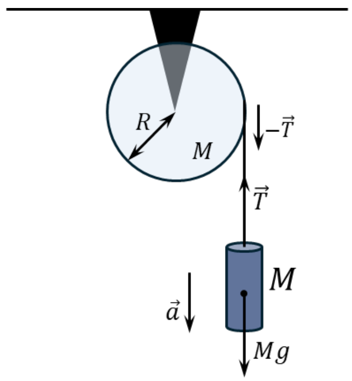


C — центр масс
J_0 — момент инерции относительно центра масс

$$J(a) = J_B = J_0 + ma^2$$

$$\boxed{J = J_0 + ma^2} \qquad (8)$$

Ex*: *Груз на блоке



Момент инерции блока:

$$J = \frac{mR^2}{2}$$

Груз:

$$Ma = Mg - T$$

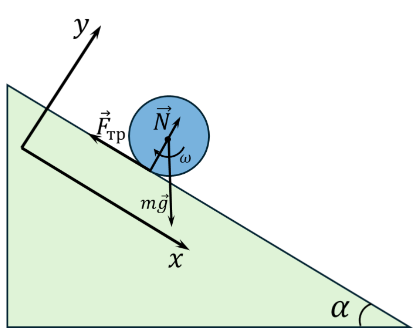
Блок:

$$J\beta = \sum_{i=1}^{k} \pm M_i = T \cdot R$$

$$Ja = TR^2 \Rightarrow T = \frac{Ja}{R^2}$$

$$\boxed{a = \frac{Mg}{M + \frac{J}{R^2}} = \frac{g}{1 + \frac{m}{2M}}} \qquad (9)$$

Ex*: *Скатывание с наклонной плоскости



$F_{\text{тр}}$ — сила трения покоя

$$a = g\sin\alpha \quad (M = 0)$$

$$a = g(\sin\alpha - M\cos\alpha)$$

Второй закон Ньютона:

$$ma = mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} \quad (OX)$$

$$mg\cos\alpha = N \quad (OY)$$

$$J\beta = F_{\text{тр}}R \Leftrightarrow F_{\text{тр}} = \frac{Ja}{R^2}$$

$$ma = mg\sin\alpha - \frac{Ja}{R^2} \Rightarrow \boxed{a = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{J}{mR^2}}} \qquad (10)$$

Импульс тела. Закон сохранения импульса

Df*: *Импульс материальной точки — векторная физическая величина равная

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}} \quad (1)$$

Размерность импульса $[p] = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}$

NO*: *А. Эйнштейн (СТО)

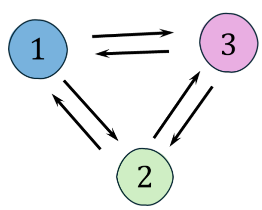
$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

***Df*: *Импульс силы:* $\vec{F}\Delta t$** Второй закон Ньютона в импульсной форме

$$\boxed{\begin{gathered} \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{F}\Delta t \\ \vec{\Delta p} = \vec{F}\Delta t \\ \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \end{gathered}} \quad (4)$$

Изменение импульса системы равно импульсу подействовавшей на неё силы

Df*: *Замкнутая система тел — совокупность произвольных объектов, взаимодействующих только между собой



$$\sum_i \sum_j \vec{F}_{i,j}\Delta t_{i,j} = \vec{0}$$

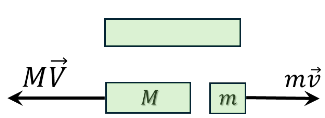
$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta = \vec{0}$$

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 = \vec{const}$$

***Lw*:** Импульс любой замкнутой механической системы неизменяется при любых взаимодействиях внутри неё

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 + \cdots$$

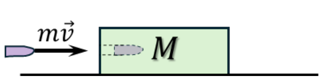
Ex*: *Явление отдачи



$$M\vec{V} + m\vec{v} = \vec{0}$$

$$\vec{V} = -\frac{m\vec{v}}{M}$$

Ex*: *Неупругий удар



Закон сохранения импульса

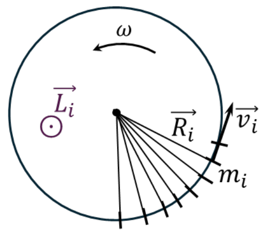
$$m\vec{v} = (m + M)\vec{V}$$

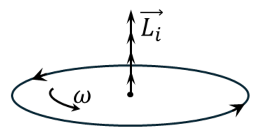
$$\boxed{\vec{V} = \frac{m}{m + M}\vec{v}} \quad (7)$$

Закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{(m + M)V^2}{2} + Q = \frac{mv^2}{2}$$

Момент импульса тела. Закон сохранения момента импульса





***Df*:** *Вектор раный векторному произведению плеча импульса на сам вектор импульса*

$$\boxed{L = \vec{r} \times \vec{p}} \quad (1)$$

$$\vec{L}_i = R\vec{m}_i\omega R$$

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} L_i = \sum_{i=1}^{\infty} m_i\omega R^2 = \omega R^2 \sum_{i=1}^{\infty} m_i = (mR^2)\omega = J\omega$$

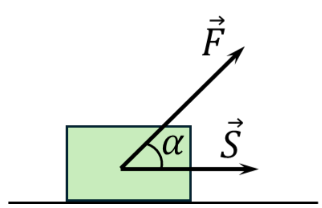
$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{r_i} \times (m_i\vec{v_i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{r_i} \times (m_i\vec{\omega} \times \vec{r_i}) = \sum_{i=1}^{\infty} m_i(\vec{r_i} \times (\vec{\omega} \times \vec{r_i})) = \sum_{i=1}^{\infty} m_i(\vec{\omega}r_i^2 - \vec{r_i}(\vec{\omega} \cdot \vec{r_i})) = \vec{\omega} \sum_{i=1}^{\infty} m_i r_i^2 = \boxed{J\vec{\omega}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \vec{L} = J\vec{\omega} \\ \vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v}) \end{matrix}} \quad (2)$$

***NO*:** *Второй закон Кеплера — закон сохранения момента импульса*

$$\boxed{\begin{matrix} m_1v_1 = m_2v_2 \\ J_1\omega_1 = J_2\omega_2 \end{matrix}} \quad (3)$$

Закон сохранения энергии



***Df*:** *Работа силы(A) — скалярная физическая величина, равная*

$$\boxed{A = \vec{F} \cdot \vec{S} = FS\cos\alpha = F_xS} \quad (1)$$

Размерность работы $[A] = \text{Н} \cdot \text{м} = 1\text{Дж}$

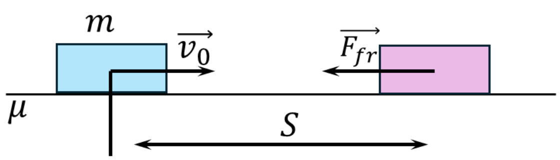
***Df*:** *Кинетическая энергия определяется выражением*

$$\boxed{E^k = \frac{mv^2}{2}} \quad (2)$$

***Теорема об изменении кинетической энергии*:** *Изменение кинетической энергии механической системы равно работе внешних сил над ней*

$$\boxed{\boxed{\Delta E^k = E_2^k - E_1^k = A}} \quad (3)$$

Ex*: *Тормозной путь автомобиля



Теорема об изменении кинетической энергии:

$$\Delta E_K = A$$

$$0 - \frac{mv_0^2}{2} = \mu mgS\cos\pi$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \mu mgS \Rightarrow \boxed{S = \frac{v_0^2}{2\mu g}} \quad (4)$$

Ex*: *Приращение кинетической энергии ΔE_K, при $\Delta v \ll v$

$$\Delta E_K = \frac{m(v+\Delta v)^2}{2} - \frac{mv^2}{2}$$

$$\Delta E_K = \frac{m(2v\Delta v + \Delta v^2)}{2} \approx \frac{2mv\Delta v}{2}$$

$$\boxed{\Delta E_K = mv\Delta v} \quad (5)$$

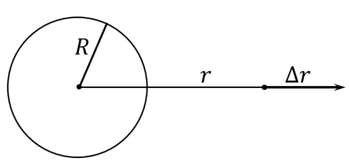
NO*: *Согласно (5), малое приращение кинетической энергии прямо пропорционально скорости, $\Delta E^K \sim v$

Df*: *Консервативная механическая система* — *механическая совокупность тел, взаимодействующих без трения и сопротивления

Lw*: *В отсутствии сил трения и сопротивления сумма кинетической и потенциальной энергии системы — величина постоянная при любых взаимодействиях внутри системы

***Теплота*:** $mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2} = mgh_2 + \frac{mv_2^2}{2} + Q$

Ex*: *Большие высоты ($h \sim R$)



$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

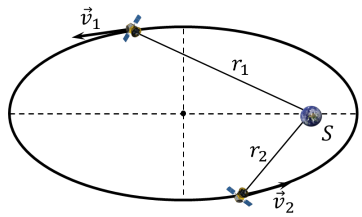
Покажем, что E в этом случае (для астрономические полётов)

$$r, r - \Delta r; \Delta r \ll r; \quad \boxed{E = -G\frac{mM}{r}} \quad (6)$$

$$A = FS\cos\alpha = \boxed{G\frac{mM}{r^2}\Delta r}$$

$$A = -\Delta E = E_1 - E_2 = -GmM\left(\frac{1}{r-\Delta r} - \frac{1}{r}\right)$$

$$A = -GmM\frac{\Delta r}{(r-\Delta r)r} \approx \boxed{G\frac{mM}{r^2}\Delta r}$$



$$\frac{mv_1^2}{2} - G\frac{mM}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - G\frac{mM}{r_2}$$

***Первая космическая скорость*:** $v_1 = \sqrt{gR} = 7.9$ км/с

***Вторая космическая скорость*:** $v_2 = \sqrt{2G\frac{M}{R}} = \sqrt{2}v_1 = 11.2$ км/с